

概率论与数理统计习题答案 第四版 盛骤

(浙江大学)

浙大第四版（高等教育出版社）

第一章 概率论的基本概念

1.[一] 写出下列随机试验的样本空间

(1) 记录一个小班一次数学考试的平均分数（充以百分制记分）（[一] 1）

$$S = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n} \wedge \wedge \frac{n \times 100}{n} \right\}, n \text{ 表小班人数}$$

(3) 生产产品直到得到 10 件正品，记录生产产品的总件数。（[一] 2）

$$S = \{10, 11, 12, \dots, n, \dots\}$$

(4) 对某工厂出厂的产品进行检查，合格的盖上“正品”，不合格的盖上“次品”，如连续查出二个次品就停止检查，或检查 4 个产品就停止检查，记录检查的结果。

查出合格品记为“1”，查出次品记为“0”，连续出现两个“0”就停止检查，或查满 4 次才停止检查。（[一] (3)）

$$S = \{00, 100, 0100, 0101, 1010, 0110, 1100, 0111, 1011, 1101, 1110, 1111, \}$$

2.[二] 设 A, B, C 为三事件，用 A, B, C 的运算关系表示下列事件。

(1) A 发生， B 与 C 不发生。

表示为： $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $A - (AB+AC)$ 或 $A - (B \cup C)$

(2) A, B 都发生, 而 C 不发生。

表示为: $AB\bar{C}$ 或 $AB-ABC$ 或 $AB-C$

(3) A, B, C 中至少有一个发生 表示为: $A+B+C$

(4) A, B, C 都发生, 表示为: ABC

(5) A, B, C 都不发生, 表示为: $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $S-(A+B+C)$ 或 $\overline{A \cup B \cup C}$

(6) A, B, C 中不多于一个发生, 即 A, B, C 中至少有两个同时不发生
相当于 $\bar{A}\bar{B}, \bar{B}\bar{C}, \bar{A}\bar{C}$ 中至少有一个发生。故 表示为: $\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}$ 。

(7) A, B, C 中不多于二个发生。

相当于: $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 中至少有一个发生。故 表示为: $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ 或 \overline{ABC}

(8) A, B, C 中至少有二个发生。

相当于: AB, BC, AC 中至少有一个发生。故 表示为: $AB+BC+AC$

6.[三] 设 A, B 是两事件且 $P(A)=0.6, P(B)=0.7$. 问(1)在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值, 最大值是多少? (2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值, 最小值是多少?

解: 由 $P(A)=0.6, P(B)=0.7$ 即知 $AB \neq \phi$, (否则 $AB = \phi$ 依互斥事件加法定理, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.6 + 0.7 = 1.3 > 1$ 与 $P(A \cup B) \leq 1$ 矛盾)。

从而由加法定理得

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \quad (*)$$

(1) 从 $0 \leq P(AB) \leq P(A)$ 知, 当 $AB=A$, 即 $A \cap B$ 时 $P(AB)$ 取到最大值, 最大值为

$$P(AB) = P(A) = 0.6,$$

(2) 从(*)式知, 当 $A \cup B = S$ 时, $P(AB)$ 取最小值, 最小值为

$$P(AB) = 0.6 + 0.7 - 1 = 0.3。$$

7.[四] 设 A, B, C 是三事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = P(BC) = 0, P(AC) = \frac{1}{8}$. 求 A, B, C 至少有一个发生的概率。

解: $P(A, B, C \text{ 至少有一个发生}) = P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} + 0 = \frac{5}{8}$

8.[五] 在一标准英语字典中具有 55 个由二个不相同的字母新组成的单词, 若从 26 个英语字母中任取两个字母予以排列, 问能排成上述单词的概率是多少?

记 A 表“能排成上述单词”

\therefore 从 26 个任选两个来排列, 排法有 A_{26}^2 种。每种排法等可能。

字典中的二个不同字母组成的单词: 55 个

$$\therefore P(A) = \frac{55}{A_{26}^2} = \frac{11}{130}$$

9. 在电话号码簿中任取一个电话号码, 求后面四个数全不相同的概率。(设后面 4 个数中的每一个数都是等可能性地取自 0, 1, 2, …, 9)

记 A 表“后四个数全不同”

\therefore 后四个数的排法有 10^4 种, 每种排法等可能。

后四个数全不同的排法有 A_{10}^4

$$\therefore P(A) = \frac{A_{10}^4}{10^4} = 0.504$$

10.[六] 在房间里有 10 人。分别佩代着从 1 号到 10 号的纪念章, 任意选 3 人记录其纪念章的号码。

(1) 求最小的号码为 5 的概率。

记“三人纪念章的最小号码为 5”为事件 A

\therefore 10 人中任选 3 人为一组: 选法有 $\binom{10}{3}$ 种, 且每种选法等可能。

又事件 A 相当于: 有一人号码为 5, 其余 2 人号码大于 5。这种组合的种数有 $1 \times \binom{5}{2}$

$$\therefore P(A) = \frac{1 \times \binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12}$$

(2) 求最大的号码为 5 的概率。

记“三人中最大的号码为 5”为事件 B，同上 10 人中任选 3 人，选法有 $\binom{10}{3}$ 种，且每种选法等可能，又事件 B 相当于：有一人号码为 5，其余 2 人号码小于 5，选法有 $1 \times \binom{4}{2}$ 种

$$P(B) = \frac{1 \times \binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{20}$$

11.[七] 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶，红漆 3 桶。在搬运中所标笺脱落，交货人随意将这些标笺重新贴，问一个定货 4 桶白漆，3 桶黑漆和 2 桶红漆顾客，按所定的颜色如数得到定货的概率是多少？

记所求事件为 A。

在 17 桶中任取 9 桶的取法有 C_{17}^9 种，且每种取法等可能。

取得 4 白 3 黑 2 红的取法有 $C_{10}^4 \times C_4^3 \times C_3^2$

$$\text{故 } P(A) = \frac{C_{10}^4 \times C_4^3 \times C_3^2}{C_{17}^9} = \frac{252}{2431}$$

12.[八] 在 1500 个产品中有 400 个次品，1100 个正品，任意取 200 个。

(1) 求恰有 90 个次品的概率。

记“恰有 90 个次品”为事件 A

\therefore 在 1500 个产品中任取 200 个，取法有 $\binom{1500}{200}$ 种，每种取法等可能。

200 个产品恰有 90 个次品，取法有 $\binom{400}{90} \binom{1100}{110}$ 种

$$\therefore P(A) = \frac{\binom{400}{90} \binom{1100}{110}}{\binom{1500}{200}}$$

(2) 至少有 2 个次品的概率。

记: A 表 “至少有 2 个次品”

B_0 表 “不含有次品”, B_1 表 “只含有一个次品”, 同上, 200 个产品不含次品, 取法有 $\binom{1100}{200}$ 种, 200 个产品含一个次品, 取法有 $\binom{400}{1} \binom{1100}{199}$ 种

$\therefore \bar{A} = B_0 + B_1$ 且 B_0, B_1 互不相容。

$$\therefore P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - [P(B_0) + P(B_1)] = 1 - \left[\frac{\binom{1100}{200}}{\binom{1500}{200}} + \frac{\binom{400}{1} \binom{1100}{199}}{\binom{1500}{200}} \right]$$

13.[九] 从 5 双不同鞋子中任取 4 只, 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率是多少?

记 A 表 “4 只全中至少有两支配成一对”

则 \bar{A} 表 “4 只人不配对”

\therefore 从 10 只中任取 4 只, 取法有 $\binom{10}{4}$ 种, 每种取法等可能。

要 4 只都不配对, 可在 5 双中任取 4 双, 再在 4 双中的每一双里任取一只。取法有 $\binom{5}{4} \times 2^4$

$$\therefore P(\bar{A}) = \frac{C_5^4 \cdot 2^4}{C_{10}^4} = \frac{8}{21}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{8}{21} = \frac{13}{21}$$

15.[十一] 将三个球随机地放入 4 个杯子中去, 问杯子中球的最大个数分别是 1, 2, 3, 的概率各为多少?

记 A_i 表 “杯中球的最大个数为 i 个” $i=1,2,3$,

三只球放入四只杯中, 放法有 4^3 种, 每种放法等可能

对 A_1 : 必须三球放入三杯中, 每杯只放一球。放法 $4 \times 3 \times 2$ 种。

(选排列: 好比 3 个球在 4 个位置做排列)

$$P(A_1) = \frac{4 \times 3 \times 2}{4^3} = \frac{6}{16}$$

对 A_2 : 必须三球放入两杯, 一杯装一球, 一杯装两球。放法有 $C_3^2 \times 4 \times 3$ 种。

(从 3 个球中选 2 个球, 选法有 C_3^2 , 再将此两个球放入一个杯中, 选法有 4 种, 最后将剩余的 1 球放入其余的一个杯中, 选法有 3 种。)

$$P(A_2) = \frac{C_3^2 \times 4 \times 3}{4^3} = \frac{9}{16}$$

对 A_3 : 必须三球都放入一杯中。放法有 4 种。(只需从 4 个杯中选 1 个杯子, 放入此 3 个球, 选法有 4 种)

$$P(A_3) = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}$$

16.[十二] 50 个铆钉随机地取来用在 10 个部件, 其中三个铆钉强度太弱, 每个部件用 3 只铆钉, 若将三只强度太弱的铆钉都装在一个部件上, 则这个部件强度就太弱, 问发生一个部件强度太弱的概率是多少?

记 A 表“10 个部件中有一个部件强度太弱”。

法一: 用古典概率作:

把随机试验 E 看作是用三个钉一组, 三个钉一组去铆完 10 个部件 (在三个钉的一组中不分先后次序。但 10 组钉铆完 10 个部件要分先后次序)

对 E : 铆法有 $C_{50}^3 \times C_{47}^3 \times C_{44}^3 \wedge \wedge \times C_{23}^3$ 种, 每种装法等可能

对 A : 三个次钉必须铆在一个部件上。这种铆法有 $(C_3^3 \times C_{47}^3 \times C_{44}^3 \wedge \wedge C_{23}^3) \times 10$ 种

$$P(A) = \frac{[C_3^3 \times C_{47}^3 \times C_{44}^3 \wedge \wedge \times C_{23}^3] \times 10}{C_{50}^3 \times C_{47}^3 \times \wedge \wedge \times C_{23}^3} = \frac{1}{1960} = 0.00051$$

法二: 用古典概率作

把试验 E 看作是在 50 个钉中任选 30 个钉排成一列，顺次钉下去，直到把部件铆完。
(铆钉要计先后次序)

对 E : 铆法有 A_{50}^3 种，每种铆法等可能

对 A : 三支次钉必须铆在“1, 2, 3”位置上或“4, 5, 6”位置上, ...或“28, 29, 30”位置上。这种铆法有 $A_3^3 \times A_{47}^{27} + A_3^3 \times A_{47}^{27} + \Lambda \Lambda + A_3^3 \times A_{47}^{27} = 10 \times A_3^3 \times A_{47}^{27}$ 种

$$P(A) = \frac{10 \times A_3^3 \times A_{47}^{27}}{A_{50}^{30}} = \frac{1}{1960} = 0.00051$$

17.[十三] 已知 $P(\bar{A}) = 0.3, P(B) = 0.4, P(A\bar{B}) = 0.5$, 求 $P(B | A \cup \bar{B})$ 。

解一:

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0.7, P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.6, A = AS = A(B \cup \bar{B}) = AB \cup A\bar{B}$
注意 $(AB)(A\bar{B}) = \phi$. 故有

$$P(AB) = P(A) - P(A\bar{B}) = 0.7 - 0.5 = 0.2。$$

再由加法定理,

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B}) = 0.7 + 0.6 - 0.5 = 0.8$$

$$\text{于是 } P(B | A \cup \bar{B}) = \frac{P[B(A \cup \bar{B})]}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{P(AB)}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$$

解二: $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B} | A) \xrightarrow{\text{由已知}} 0.5 = 0.7 \cdot P(\bar{B} | A)$

$$\therefore P(\bar{B} | A) = \frac{0.5}{0.7} = \frac{5}{7} \Rightarrow P(B | A) = \frac{2}{7} \quad \text{故} \quad P(AB) = P(A)P(B | A) = \frac{1}{5}$$

$$P(B | A \cup \bar{B}) \stackrel{\text{定义}}{=} \frac{P(BA \cup B\bar{B})}{P(A \cup \bar{B})} = \frac{P(BA)}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B})} = \frac{\frac{1}{5}}{0.7 + 0.6 - 0.5} = 0.25$$

18.[十四] $P(A) = \frac{1}{4}, P(B | A) = \frac{1}{3}, P(A | B) = \frac{1}{2}$, 求 $P(A \cup B)$ 。

$$\text{解: 由 } P(A|B) \stackrel{\text{定义}}{=} \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \xrightarrow{\text{由已知条件}} \text{有 } \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{6}$$

$$\text{由乘法公式, 得 } P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12}$$

$$\text{由加法公式, 得 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

19.[十五] 掷两颗骰子, 已知两颗骰子点数之和为 7, 求其中有一颗为 1 点的概率(用两种方法)。

解: (方法一) (在缩小的样本空间 SB 中求 $P(A|B)$, 即将事件 B 作为样本空间, 求事件 A 发生的概率)。

掷两颗骰子的试验结果为一有序数组 (x, y) ($x, y=1, 2, 3, 4, 5, 6$) 并且满足 $x+y=7$, 则样本空间为

$$S = \{(x, y) | (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

每种结果 (x, y) 等可能。

$$A = \{\text{掷二骰子, 点数和为 7 时, 其中有一颗为 1 点. 故 } P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\}$$

$$\text{方法二: (用公式 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{)}$$

$$S = \{(x, y) | x=1, 2, 3, 4, 5, 6; y=1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ 每种结果均可能}$$

$A =$ “掷两颗骰子, x, y 中有一个为 “1” 点”, $B =$ “掷两颗骰子, $x+y=7$ ”。则

$$P(B) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}, P(AB) = \frac{2}{6^2},$$

$$\text{故 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6^2}}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

20.[十六] 据以往资料表明, 某一 3 口之家, 患某种传染病的概率有以下规律:
 $P(A) = P\{\text{孩子得病}\} = 0.6$, $P(B|A) = P\{\text{母亲得病}|\text{孩子得病}\} = 0.5$, $P(C|AB) = P\{\text{父亲得病}|\text{母亲及孩子得病}\} = 0.4$ 。求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率。

解：所求概率为 $P(AB\bar{C})$ （注意：由于“母病”，“孩病”，“父病”都是随机事件，这里不是求 $P(\bar{C}|AB)$ ）

$$P(AB) = P(A) = P(B|A) = 0.6 \times 0.5 = 0.3, P(\bar{C}|AB) = 1 - P(C|AB) = 1 - 0.4 = 0.6.$$

$$\text{从而 } P(AB\bar{C}) = P(AB) \cdot P(\bar{C}|AB) = 0.3 \times 0.6 = 0.18.$$

21.[十七] 已知 10 只晶体管中有 2 只次品，在其中取二次，每次随机地取一只，作不放回抽样，求下列事件的概率。

(1) 二只都是正品（记为事件 A）

法一：用组合做 在 10 只中任取两只来组合，每一个组合看作一个基本结果，每种取法等可能。

$$P(A) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45} = 0.62$$

法二：用排列做 在 10 只中任取两个来排列，每一个排列看作一个基本结果，每个排列等可能。

$$P(A) = \frac{A_8^2}{A_{10}^2} = \frac{28}{45}$$

法三：用事件的运算和概率计算法则来作。

记 A_1, A_2 分别表第一、二次取得正品。

$$P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$$

(2) 二只都是次品（记为事件 B）

$$\text{法一：} \quad P(B) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

$$\text{法二：} \quad P(B) = \frac{A_2^2}{A_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

$$\text{法三：} \quad P(B) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

(3) 一只是正品，一只是次品（记为事件 C ）

法一：
$$P(C) = \frac{C_8^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}$$

法二：
$$P(C) = \frac{(C_8^1 \times C_2^1) \times A_2^2}{A_{10}^2} = \frac{16}{45}$$

法三：
$$P(C) = P(A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2) \text{ 且 } A_1 \bar{A}_2 \text{ 与 } \bar{A}_1 A_2 \text{ 互斥}$$
$$= P(A_1)P(\bar{A}_2 | A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} = \frac{16}{45}$$

(4) 第二次取出的是次品（记为事件 D ）

法一：因为要注意第一、第二次的顺序。不能用组合作，

法二：
$$P(D) = \frac{A_9^1 \times A_2^1}{A_{10}^2} = \frac{1}{5}$$

法三：
$$P(D) = P(A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2) \text{ 且 } A_1 \bar{A}_2 \text{ 与 } \bar{A}_1 A_2 \text{ 互斥}$$
$$= P(A_1)P(\bar{A}_2 | A_1) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) = \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{5}$$

22.[十八] 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而随机的拨号，求他拨号不超过三次而接通所需的电话的概率是多少？如果已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

记 H 表拨号不超过三次而能接通。

A_i 表第 i 次拨号能接通。

注意：第一次拨号不通，第二拨号就不再拨这个号码。

⊙ $H = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ 三种情况互斥

∴
$$P(H) = P(A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(A_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2)$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{10}$$

如果已知最后一个数字是奇数（记为事件 B ）问题变为在 B 已发生的条件下，求 H 再发生的概率。

$$\begin{aligned} P(H|B) &= P(A_1|B) + P(\bar{A}_1 A_2|B) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3|B) \\ &= P(A_1|B) + P(\bar{A}_1|B)P(A_2|B\bar{A}_1) + P(\bar{A}_1|B)P(\bar{A}_2|B\bar{A}_1)P(A_3|B\bar{A}_1\bar{A}_2) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

24.[十九] 设有甲、乙二袋，甲袋中装有 n 只白球 m 只红球，乙袋中装有 N 只白球 M 只红球，今从甲袋中任取一球放入乙袋中，再从乙袋中任取一球，问取到（即从乙袋中取到）白球的概率是多少？（此为第三版 19 题(1)）

记 A_1, A_2 分别表“从甲袋中取得白球，红球放入乙袋”

再记 B 表“再从乙袋中取得白球”。

$\because B = A_1 B + A_2 B$ 且 A_1, A_2 互斥

$\therefore P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$

$$= \frac{n}{n+m} \times \frac{N+1}{N+M+1} + \frac{m}{n+m} \times \frac{N}{N+M+1}$$

[十九](2) 第一只盒子装有 5 只红球，4 只白球；第二只盒子装有 4 只红球，5 只白球。先从第一盒子中任取 2 只球放入第二盒中去，然后从第二盒子中任取一只球，求取到白球的概率。

记 C_1 为“从第一盒子中取得 2 只红球”。

C_2 为“从第一盒子中取得 2 只白球”。

C_3 为“从第一盒子中取得 1 只红球，1 只白球”，

D 为“从第二盒子中取得白球”，显然 C_1, C_2, C_3 两两互斥， $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = S$ ，由全概率公式，有

$$P(D) = P(C_1)P(D|C_1) + P(C_2)P(D|C_2) + P(C_3)P(D|C_3)$$

$$= \frac{C_5^2}{C_9^2} \cdot \frac{5}{11} + \frac{C_4^2}{C_9^2} \cdot \frac{7}{11} + \frac{C_5^1 \cdot C_4^1}{C_9^2} \cdot \frac{6}{11} = \frac{53}{99}$$

26.[二十一] 已知男人中有 5% 是色盲患者，女人中有 0.25% 是色盲患者。今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解： $A_1 = \{\text{男人}\}$ ， $A_2 = \{\text{女人}\}$ ， $B = \{\text{色盲}\}$ ， 显然 $A_1 \cup A_2 = S$ ， $A_1 A_2 = \phi$

由已知条件知 $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$ ， $P(B | A_1) = 5\%$ ， $P(B | A_2) = 0.25\%$

由贝叶斯公式，有

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B | A_1)}{P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{10000}} = \frac{20}{21}$$

[二十二] 一学生接连参加同一课程的两次考试。第一次及格的概率为 P ，若第一次及格则第二次及格的概率也为 P ；若第一次不及格则第二次及格的概率为 $\frac{P}{2}$ 。（1）若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率。（2）若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率。

解： $A_i = \{\text{他第 } i \text{ 次及格}\}$ ， $i=1,2$

已知 $P(A_1) = P(A_2 | A_1) = P$ ， $P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{P}{2}$

（1） $B = \{\text{至少有一次及格}\}$

所以 $\bar{B} = \{\text{两次均不及格}\} = \bar{A}_1 \bar{A}_2$

$$\therefore P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)$$

$$= 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2 | \bar{A}_1)]$$

$$= 1 - (1 - P)(1 - \frac{P}{2}) = \frac{3}{2}P - \frac{1}{2}P^2$$

$$(2) P(A_1 A_2) \stackrel{\text{定义}}{=} \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_2)} \quad (*)$$

由乘法公式，有 $P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) = P^2$

由全概率公式，有 $P(A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1)$

$$= P \cdot P + (1 - P) \cdot \frac{P}{2}$$

$$= \frac{P^2}{2} + \frac{P}{2}$$

将以上两个结果代入 (*) 得 $P(A_1 | A_2) = \frac{\frac{P^2}{2}}{\frac{P^2}{2} + \frac{P}{2}} = \frac{2P}{P+1}$

28.[二十五] 某人下午 5:00 下班, 他所积累的资料表明:

到家时间	5:35~5:39	5:40~5:44	5:45~5:49	5:50~5:54	迟于 5:54
乘地铁到家的概率	0.10	0.25	0.45	0.15	0.05
乘汽车到家的概率	0.30	0.35	0.20	0.10	0.05

某日他抛一枚硬币决定乘地铁还是乘汽车, 结果他是 5:47 到家的, 试求他是乘地铁回家的概率。

解: 设 A = “乘地铁”, B = “乘汽车”, C = “5:45~5:49 到家”, 由题意, $AB = \Phi$, $A \cup B = S$

已知: $P(A) = 0.5$, $P(C|A) = 0.45$, $P(C|B) = 0.2$, $P(B) = 0.5$

由贝叶斯公式有

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} = \frac{0.5 \times 0.45}{P(C|A)\frac{1}{2} + P(C|B)\frac{1}{2}} = \frac{0.45}{0.65} = \frac{9}{13} = 0.6923$$

29.[二十四] 有两箱同种类型的零件。第一箱装 5 只, 其中 10 只一等品; 第二箱 30 只, 其中 18 只一等品。今从两箱中任挑出一箱, 然后从该箱中取零件两次, 每次任取一只, 作不放回抽样。试求 (1) 第一次取到的零件是一等品的概率。(2) 第一次取到的零件是一等品的条件下, 第二次取到的也是一等品的概率。

解: 设 B_i 表示 “第 i 次取到一等品” $i=1, 2$

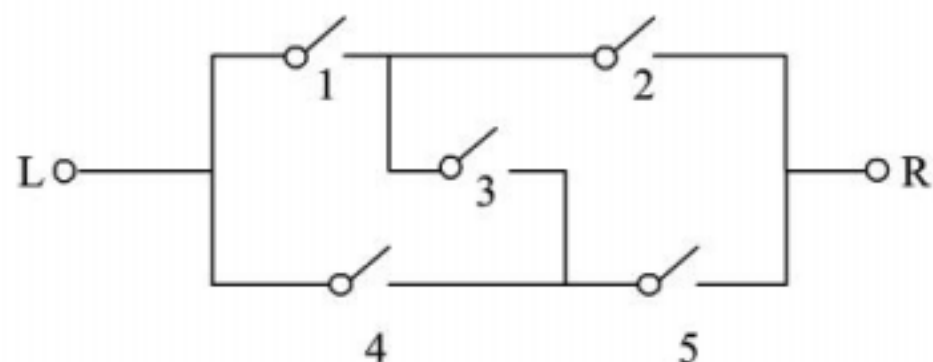
A_j 表示“第 j 箱产品” $j=1,2$, 显然 $A_1 \cup A_2 = S$ $A_1 A_2 = \phi$

$$(1) P(B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{50} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{30} = \frac{2}{5} = 0.4 \quad (B_1 = A_1 B + A_2 B \text{ 由全概率公式解}).$$

$$(2) P(B_2 | B_1) = \frac{P(B_1 B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{2} \frac{10}{50} \frac{9}{49} + \frac{1}{2} \frac{18}{30} \frac{17}{29}}{\frac{2}{5}} = 0.4857$$

(先用条件概率定义, 再求 $P(B_1 B_2)$ 时, 由全概率公式解)

32.[二十六(2)] 如图 1, 2, 3, 4, 5 表示继电器接点, 假设每一继电器接点闭合的概率为 p , 且设各继电器闭合与否相互独立, 求 L 和 R 是通路的概率。



记 A_i 表第 i 个接点接通

记 A 表从 L 到 R 是构成通路的。

$\therefore A = A_1 A_2 + A_1 A_3 A_5 + A_4 A_5 + A_4 A_3 A_2$ 四种情况不互斥

$\therefore P(A) = P(A_1 A_2) + P(A_1 A_3 A_5) + P(A_4 A_5) + P(A_4 A_3 A_2) - P(A_1 A_2 A_3 A_5)$

$$+ P(A_1 A_2 A_4 A_5) + P(A_1 A_2 A_3 A_4) + P(A_1 A_3 A_4 A_5)$$

$$+ P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) - P(A_2 A_3 A_4 A_5) + P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) + P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5)$$

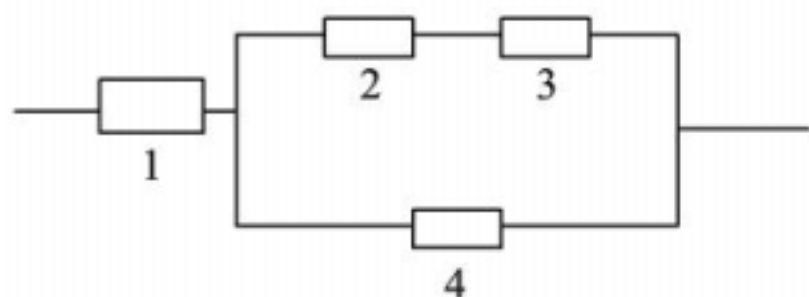
$$+ P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) + P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) - P(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5)$$

又由于 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 互相独立。

$$\text{故 } P(A) = p^2 + p^3 + p^2 + p^3 - [p^4 + p^4 + p^4 + p^4 + p^5 + p^4]$$

$$+ [p^5 + p^5 + p^5 + p^5] - p^5 = 2p^2 + 3p^3 - 5p^4 + 2p^5$$

[二十六(1)] 设有 4 个独立工作的元件 1, 2, 3, 4。它们的可靠性分别为 P_1, P_2, P_3, P_4 , 将它们按图 (1) 的方式联接, 求系统的可靠性。



记 A_i 表示第 i 个元件正常工作, $i=1, 2, 3, 4$,

A 表示系统正常。

$\therefore A=A_1A_2A_3+A_1A_4$ 两种情况不互斥

$$\therefore P(A)=P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_4)-P(A_1A_2A_3A_4) \quad (\text{加法公式})$$

$$=P(A_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(A_4)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$=P_1P_2P_3+P_1P_4-P_1P_2P_3P_4 \quad (A_1, A_2, A_3, A_4 \text{ 独立})$$

34.[三十一] 袋中装有 m 只正品硬币, n 只次品硬币, (次品硬币的两面均印有国徽)。在袋中任取一只, 将它投掷 r 次, 已知每次都得到国徽。问这只硬币是正品的概率为多少?

解: 设“出现 r 次国徽面” $=B_r$ “任取一只是正品” $=A$

由全概率公式, 有

$$P(B_r)=P(A)P(B_r|A)+P(\bar{A})P(B_r|\bar{A})=\frac{m}{m+n}\left(\frac{1}{2}\right)^r+\frac{n}{m+n}\times 1^r$$

$$\therefore P(A|B_r)=\frac{P(A)P(B_r|A)}{P(B_r)}=\frac{\frac{m}{m+n}\left(\frac{1}{2}\right)^r}{\frac{m}{m+n}\left(\frac{1}{2}\right)^r+\frac{n}{m+n}}=\frac{m}{m+n\cdot 2^r}$$

(条件概率定义与乘法公式)

35. 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击, 三人击中的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7。飞机被一人击中而被击落的概率为 0.2, 被两人击中而被击落的概率为 0.6, 若三人都击中, 飞机必定被击落。求飞机被击落的概率。

解: 高 H_i 表示飞机被 i 人击中, $i=1, 2, 3$ 。 B_1, B_2, B_3 分别表示甲、乙、丙击中飞机

$$\therefore H_1=B_1\bar{B}_2\bar{B}_3+\bar{B}_1\bar{B}_2B_3+\bar{B}_1B_2\bar{B}_3, \text{ 三种情况互斥。}$$

$$H_2=B_1B_2\bar{B}_3+B_1\bar{B}_2B_3+\bar{B}_1B_2B_3 \quad \text{三种情况互斥}$$

$$H_3=B_1B_2B_3$$

又 B_1, B_2, B_3 独立。

$$\begin{aligned}\therefore P(H_1) &= P(B_1)P(\bar{B}_2)P(\bar{B}_3) + P(\bar{B}_1)P(B_2)P(\bar{B}_3) \\ &\quad + P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2)P(B_3) = 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \\ &\quad \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7 = 0.36\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(H_2) &= P(B_1)P(B_2)P(\bar{B}_3) + P(B_1)P(\bar{B}_2)P(B_3) \\ &\quad + P(\bar{B}_1)P(B_2)P(B_3) = 0.4 \times 0.5 \times 0.3 \\ &\quad + 0.4 \times 0.5 \times 0.7 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7 = 0.41\end{aligned}$$

$$P(H_3) = P(B_1)P(B_2)P(B_3) = 0.4 \times 0.5 \times 0.7 = 0.14$$

又因： $A = H_1A + H_2A + H_3A$ 三种情况互斥

故由全概率公式，有

$$\begin{aligned}P(A) &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) \\ &= 0.36 \times 0.2 + 0.41 \times 0.6 + 0.14 \times 1 = 0.458\end{aligned}$$

36.[三十三]设由以往记录的数据分析。某船只运输某种物品损坏 2%（这一事件记为 A_1 ），10%（事件 A_2 ），90%（事件 A_3 ）的概率分别为 $P(A_1)=0.8$ ， $P(A_2)=0.15$ ， $P(A_3)=0.05$ ，现从中随机地独立地取三件，发现这三件都是好的（这一事件记为 B ），试分别求 $P(A_1|B)$ ， $P(A_2|B)$ ， $P(A_3|B)$ （这里设物品件数很多，取出第一件以后不影响取第二件的概率，所以取第一、第二、第三件是互相独立地）

$\therefore B$ 表取得三件好物品。

$$B = A_1B + A_2B + A_3B \quad \text{三种情况互斥}$$

由全概率公式，有

$$\begin{aligned}\therefore P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\ &= 0.8 \times (0.98)^3 + 0.15 \times (0.9)^3 + 0.05 \times (0.1)^3 = 0.8624\end{aligned}$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.8 \times (0.98)^3}{0.8624} = 0.8731$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0.15 \times (0.9)^3}{0.8624} = 0.1268$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.05 \times (0.1)^3}{0.8624} = 0.0001$$

37.[三十四] 将 A, B, C 三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为 α ，而输出为其它一字母的概率都是 $(1-\alpha)/2$ 。今将字母串 $AAAA, BBBB, CCCC$ 之一输入信道，输入 $AAAA, BBBB, CCCC$ 的概率分别为 p_1, p_2, p_3 ($p_1+p_2+p_3=1$)，已知输出为 $ABCA$ ，问输入的是 $AAAA$ 的概率是多少？（设信道传输每个字母的工作是相互独立的。）

解：设 D 表示输出信号为 $ABCA$ ， B_1, B_2, B_3 分别表示输入信号为 $AAAA, BBBB, CCCC$ ，则 B_1, B_2, B_3 为一完备事件组，且 $P(B_i)=P_i, i=1, 2, 3$ 。

再设 A 发、 A 收分别表示发出、接收字母 A ，其余类推，依题意有

$$P(A_{\text{收}}|A_{\text{发}}) = P(B_{\text{收}}|B_{\text{发}}) = P(C_{\text{收}}|C_{\text{发}}) = \alpha,$$

$$P(A_{\text{收}}|B_{\text{发}}) = P(A_{\text{收}}|C_{\text{发}}) = P(B_{\text{收}}|A_{\text{发}}) = P(B_{\text{收}}|C_{\text{发}}) = P(C_{\text{收}}|A_{\text{发}}) = P(C_{\text{收}}|B_{\text{发}}) = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\text{又 } P(ABCA|AAAA) = P(D|B_1) = P(A_{\text{收}}|A_{\text{发}})P(B_{\text{收}}|A_{\text{发}})P(C_{\text{收}}|A_{\text{发}})P(A_{\text{收}}|A_{\text{发}})$$

$$= \alpha^2 \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2,$$

$$\text{同样可得 } P(D|B_2) = P(D|B_3) = \alpha \cdot \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3$$

于是由全概率公式，得

$$\begin{aligned} P(D) &= \sum_{i=1}^3 P(B_i)P(D|B_i) \\ &= p_1 \alpha^2 \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 + (p_2 + p_3) \alpha \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

由 Bayes 公式，得

$$P(AAAA|ABCA) = P(B_1|D) = \frac{P(B_1)P(D|B_1)}{P(D)}$$

$$= \frac{2\alpha P_1}{2\alpha P_1 + (1-\alpha)(P_2 + P_3)}$$

[二十九] 设第一只盒子装有 3 只蓝球, 2 只绿球, 2 只白球; 第二只盒子装有 2 只蓝球, 3 只绿球, 4 只白球。独立地分别从两只盒子各取一只球。(1) 求至少有一只蓝球的概率, (2) 求有一只蓝球一只白球的概率, (3) 已知至少有一只蓝球, 求有一只蓝球一只白球的概率。

解: 记 A_1 、 A_2 、 A_3 分别表示是从第一只盒子中取到一只蓝球、绿球、白球, B_1 、 B_2 、 B_3 分别表示是从第二只盒子中取到一只蓝球、绿球、白球。

(1) 记 $C = \{\text{至少有一只蓝球}\}$

$C = A_1B_1 + A_1B_2 + A_1B_3 + A_2B_1 + A_3B_1$, 5 种情况互斥

由概率有限可加性, 得

$$P(C) = P(A_1B_1) + P(A_1B_2) + P(A_1B_3) + P(A_2B_1) + P(A_3B_1)$$

$$\underline{\text{独立性}} P(A_1)P(B_1) + P(A_1)P(B_2) + P(A_1)P(B_3) + P(A_2)P(B_1) + P(A_3)P(B_1)$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

(2) 记 $D = \{\text{有一只蓝球, 一只白球}\}$, 而且知 $D = A_1B_3 + A_3B_1$ 两种情况互斥

$$P(D) = P(A_1B_3) + P(A_3B_1) = P(A_1)P(B_3) + P(A_3)P(B_1)$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{63}$$

$$(3) P(D|C) = \frac{P(CD)}{P(C)} = \frac{P(D)}{P(C)} = \frac{16}{35} \quad (\text{注意到 } CD = D)$$

[三十] A , B , C 三人在同一办公室工作, 房间有三部电话, 据统计知, 打给 A , B , C 的电话的概率分别为 $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ 。他们三人常因工作外出, A , B , C 三人外出的概率分别为 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, 设三人的行动相互独立, 求

(1) 无人接电话的概率; (2) 被呼叫人在办公室的概率; 若某一时间断打进了 3 个电话, 求 (3) 这 3 个电话打给同一人的概率; (4) 这 3 个电话打给不同人的概率; (5) 这 3 个电话都打给 B , 而 B 却都不在的概率。

解：记 C_1 、 C_2 、 C_3 分别表示打给 A 、 B 、 C 的电话

D_1 、 D_2 、 D_3 分别表示 A 、 B 、 C 外出

注意到 C_1 、 C_2 、 C_3 独立，且 $P(C_1)=P(C_2)=\frac{2}{5}$ ， $P(C_3)=\frac{1}{5}$

$$P(D_1)=\frac{1}{2}, \quad P(D_2)=P(D_3)=\frac{1}{4}$$

$$(1) P(\text{无人接电话}) = P(D_1 D_2 D_3) = P(D_1)P(D_2)P(D_3)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

(2) 记 $G = \text{“被呼叫人在办公室”}$ ， $G = C_1 \overline{D_1} + C_2 \overline{D_2} + C_3 \overline{D_3}$ 三种情况互斥，由有限可加性与乘法公式

$$\begin{aligned} P(G) &= P(C_1 \overline{D_1}) + P(C_2 \overline{D_2}) + P(C_3 \overline{D_3}) \\ &= P(C_1)P(\overline{D_1} | C_1) + P(C_2)P(\overline{D_2} | C_2) + P(C_3)P(\overline{D_3} | C_3) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{13}{20} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \text{由于某人外出与} \\ \text{否和来电话无关} \\ \text{故 } P(\overline{D_k} | C_k) = P(\overline{D_k}) \end{array} \right)$$

(3) H 为“这 3 个电话打给同一个人”

$$P(H) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{17}{125}$$

(4) R 为“这 3 个电话打给不同的人”

R 由六种互斥情况组成，每种情况为打给 A 、 B 、 C 的三个电话，每种情况的概率为

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{125}$$

$$\text{于是 } P(R) = 6 \times \frac{4}{125} = \frac{24}{125}$$

(5) 由于是知道每次打电话都给 B ，其概率是 1，所以每一次打给 B 电话而 B 不在的概率为 $\frac{1}{4}$ ，且各次情况相互独立

$$\text{于是 } P(\text{3 个电话都打给 } B, B \text{ 都不在的概率}) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

